Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровня сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1-12 записываются по приведенному ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13-19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\sin\left(\alpha+\beta\right) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

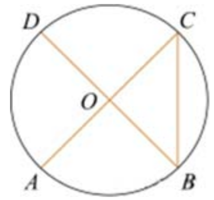
$$\cos\left(\alpha+\beta\right) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

©2024 Тюменский областной государственный институт развития регионального образования
Копирование не допускается

Часть 1

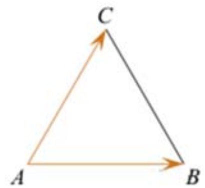
Ответом к заданиям 1-12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В окружности с центром O отрезки AC и BD — диаметры. Вписанный угол ACB равен 38°. Найдите центральный угол AOD. Ответ дайте в градусах.



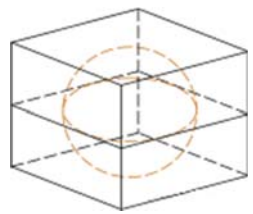
Ответ: ___________________.

2 Стороны правильного треугольника ABC равны $2\sqrt{3}$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.



Ответ: ___________________.

3 Объём куба, описанного около сферы, равен 1728. Найдите радиус сферы.



Ответ: ___________________.

©2024 Тюменский областной государственный институт развития регионального образования
Копирование не допускается

4

Вероятность того, что новый ноутбук в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,045. В некотором городе из 1000 проданных ноутбуков в течение года в гарантийную мастерскую поступила 51 штука. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

Ответ: ___________________.

5

При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше, чем 810 г, равна 0,97. Вероятность того, что масса окажется больше, чем 790 г, равна 0,91. Найдите вероятность того, что масса буханки больше, чем 790 г, но меньше, чем 810 г.

Ответ: ___________________.

6

Решите уравнение $\log_{x-5} 49 = 2$
Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Ответ: ___________________.

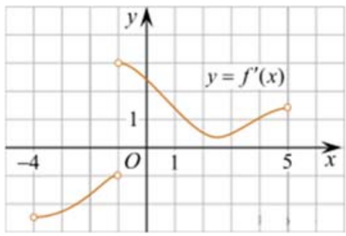
7

Найдите $24cos2\alpha$, если $sin\alpha = -0{,}2$

Ответ: ___________________.

8

Функция $f(x)$ определена и непрерывна на полуинтервале $[-4; 5)$. На рисунке изображен график её производной. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



Ответ: ___________________.

©2024 Тюменский областной государственный институт развития регионального образования
Копирование не допускается

9

Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 749 МГц. Скорость погружения батискафа вычисляется по формуле $v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0}$, где c=1500 м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов, f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите частоту отражённого сигнала в МГц, если скорость погружения батискафа равна 2 м/с.

Ответ: ___________________.

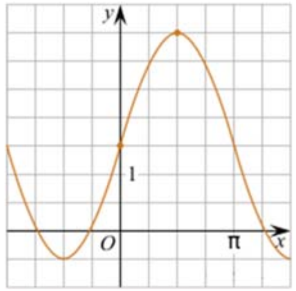
10

После смешения двух растворов, первый из которых содержал 150 г кислоты, а второй содержал 60 г такой же кислоты, получили 400 г нового раствора. Найдите концентрацию первого раствора (в процентах), если известно, что она на 20 больше концентрации второго (в процентах).

Ответ: ___________________.

11

На рисунке изображён график функции $f(x) = asinx + b$
Найдите *b*.



Ответ: ___________________.

12

Найдите точку максимума функции $y = \log_2(2 + 2x - x^2) - 2$

Ответ: ___________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

©2024 Тюменский областной государственный институт развития регионального образования
Копирование не допускается

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13-19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\frac{1-cos2x-sinx}{cosx-1}=0$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие интервалу $(\frac{5\pi}{2}\ ;5\pi)$

14 Прямоугольник $ABCD$ и цилиндр расположены таким образом, что AB — диаметр верхнего основания цилиндра, а CD лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности, при этом плоскость прямоугольника наклонена к плоскости основания цилиндра под углом 60°.
а) Докажите, что $ABCD$ — квадрат.
б) Найдите длину той части отрезка BD, которая находится снаружи цилиндра, если радиус цилиндра равен$\sqrt{2}$.

15 Решите неравенство $\log_x(1-2x) \le 3-\log_{(\frac{1}{x}-2)} x$

16 Банк под определенный процент принял некоторую сумму. Через год четверть накопленной суммы была снята со счета. Банк увеличил процент годовых на 40 процентных пунктов (то есть увеличил ставку a% до $(a+40)$%). К концу следующего года накопленная сумма в 1,44 раза превысила первоначальный вклад. Каков процент новых годовых?

17 В окружности с центром O проведена хорда AB, на которой выбрана точка M. Вторая окружность, описанная около треугольника MAO, повторно пересекает первую окружность в точке K.
а) Докажите, что $BM = MK$.
б) Найдите площадь треугольника OMK, если $OM = 11$ и $BK = 12$.

18 Найти все значения a, при каждом из которых функция
$f(x)=x^2-2|x-a^2|-8x$ имеет более двух точек экстремума.

©2024 Тюменский областной государственный институт развития регионального образования
Копирование не допускается

19 На доске написано 19 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 11. Среднее арифметическое написанных на доске чисел равно 10. С этими числами произвели следующие действия: четные числа разделили на 2, а нечетные — умножили на 2. Пусть A — среднее арифметическое полученных чисел.
а) Могли ли оказаться так, что $A = 17$?
б) Могли ли оказаться так, что $A = 7$?
в) Найдите наибольшее возможное значение A.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

©2024 Тюменский областной государственный институт развития регионального образования
Копирование не допускается

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом.

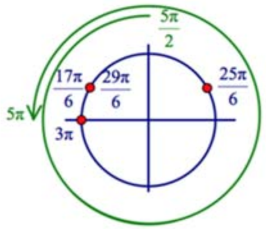
13 а) Решите уравнение $\frac{1-cos2x-sinx}{cosx-1}=0$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие интервалу $\left(\frac{5\pi}{2};5\pi\right)$

Решение. а) Последовательно получаем:

$$\frac{1-\cos 2x-\sin x}{\cos x-1}=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{2\sin^2 x-\sin x}{\cos x-1}=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x\cdot(2\sin x-1), \\ \cos x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x=0, \\ \sin x=\frac{1}{2}, \end{array}\right. \\ \cos x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi+2\pi n,\ n\in Z, \\ x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z. \end{array}\right.$$



б) Отбор корней произведем с помощью единичной окружности.

$$x_1=\frac{5\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{17\pi}{6};\ x_2=3\pi;\ x_3==4\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{25\pi}{6};\ x_4=5\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{29\pi}{6}.$$

Ответ: а) $\pi+2\pi n,\ n\in Z;\ (-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n\ n\in Z.$ б) $\frac{17\pi}{6};\ 3\pi;\ \frac{25\pi}{6};\ \frac{29\pi}{6}.$

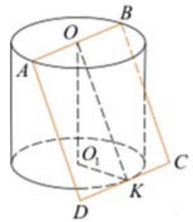
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

©2024 Тюменский областной государственный институт развития регионального образования
Копирование не допускается

14 Прямоугольник $ABCD$ и цилиндр расположены таким образом, что AB — диаметр верхнего основания цилиндра, а CD лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности, при этом плоскость прямоугольника наклонена к плоскости основания цилиндра под углом 60°.

а) Докажите, что $ABCD$ — квадрат.

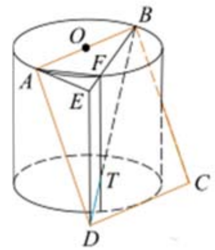
б) Найдите длину той части отрезка BD, которая находится снаружи цилиндра, если радиус цилиндра равен $\sqrt{2}$.



Решение. а) Пусть сторона CD прямоугольника касается окружности нижнего основания в точке K, O_1 — центр нижнего основания, а O — центр верхнего. Тогда O_1O — перпендикуляр к плоскости основания, отрезок O_1K перпендикулярен отрезку CD и по теореме о трех перпендикулярах отрезок OK перпендикулярен CD. Поэтому K — середина CD. Тогда упомянутый угол наклона — угол OKO_1 = 60° и $cos\angle OKO_1=\frac{O_1K}{OK}=\frac{r}{OK}$,где r — радиус цилиндра. При этом $cos\angle OKO_1=\frac{1}{2}$, поэтому OK=AD=AB=2r,

значит, $ABCD$ — квадрат.

б) Пусть отрезок BD пересекает поверхность цилиндра в точке T; E и F — проекции точек D и T соответственно на плоскость верхнего основания.



Тогда FT лежит на образующей, и поэтому отрезок FT параллелен отрезку DE. Значит, $\frac{DT}{TB}=\frac{EF}{FB}$. Поскольку $\angle AFB$ = 90° как угол, опирающийся на диаметр,

$$\frac{EF}{FB}=\frac{EF}{FA}\cdot\frac{FA}{FB}=tg\angle EAF\cdot tg\angle ABF=tg^2\angle ABF=\left(\frac{EA}{AB}\right)^2=\frac{1}{4}$$

Поэтому и $\frac{DT}{TB}=\frac{1}{4}$. т. е.

$$DT=\frac{1}{5}BD=\frac{1}{5}AD\sqrt{2}==\frac{2\sqrt{2}}{5}r=\frac{2\sqrt{2}}{5}\cdot\sqrt{2}=0,8.$$

Ответ: 0,8.

©2024 Тюменский областной государственный институт развития регионального образования
Копирование не допускается

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

15 Решите неравенство $\log_x(1-2x) \leq 3 - \log_{\left(\frac{1}{x}-2\right)} x$

Решение. Ограничения на x : $0 < x < 0{,}5$ и $x \neq \frac{1}{3}$

Для таких x:

$$\log_x(1-2x) \leqslant 3 - \log_{\left(\frac{1}{x}-2\right)} x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_x(1-2x) \leqslant 3 - \frac{1}{\log_x(1-2x) - \log_x x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_x(1-2x) + \frac{1}{\log_x(1-2x)-1} - 3 \leqslant 0.$$

Пусть $\log_x(1-2x) = t$.Тогда

$$t + \frac{1}{t-1} - 3 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{t^2-t+1-3t+3}{t-1} \leqslant 0 \Leftrightarrow\Leftrightarrow \frac{t^2-4t+4}{t-1} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(t-2)^2}{t-1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2, \\ t-1<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2, \\ t<1. \end{array}\right.$$

Перейдем к переменной x.

©2024 Тюменский областной государственный институт развития регионального образования
Копирование не допускается

$$\log_x(1-2x) = 2 \Leftrightarrow 1-2x = x^2 \Leftrightarrow x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{1+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1-\sqrt{2}, \\ x=\sqrt{2}-1. \end{array}\right.$$

Полученный отрицательный корень $x = -1-\sqrt{2} < 0$ не подходит.

При имеющихся ограничениях на x: $\log_x(1-2x) < 1, 1-2x > x,\ 0 < x < \frac{1}{3}$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{3}\right) \cup \left\{\sqrt{2}-1\right\}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

16 Банк под определенный процент принял некоторую сумму. Через год четверть накопленной суммы была снята со счета. Банк увеличил процент годовых на 40 процентных пунктов (то есть увеличил ставку a% до $(a+40)$%). К концу следующего года накопленная сумма в 1,44 раза превысила первоначальный вклад. Каков процент новых годовых?

Решение. Пусть банк первоначально принял вклад в размере S у. е. под $x\%$годовых. Тогда к началу второго года сумма стала $S(1+0{,}01x)$у. е.

После снятия четверти накопленной суммы на счету осталось $\frac{3S}{4}(1+0{,}01x)$ у. е.

С момента увеличения банком процентной ставки на 40% к концу второго года хранения остатка вклада накопленная сумма стала

$\frac{3S}{4}(1+0{,}01x)(1+(x+40)\cdot 0{,}01)$ у. е.

По условию задачи эта сумма равна 1,44S у.е.

Решим уравнение $\frac{3S}{4}(1+0{,}01x)(1+(x+40)\cdot 0{,}01) = 1{,}44S$

$$\frac{3S}{4}(1+0{,}01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0{,}01) = 1{,}44S \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+0{,}01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0{,}01) = 1{,}92 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (100+x)\cdot(100+(x+40)) = 19200 \Leftrightarrow\Leftrightarrow (100+x)\cdot(140+x) = 19200 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -120 \pm \sqrt{19600} \Leftrightarrow x = -120 \pm 140 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 20.$$

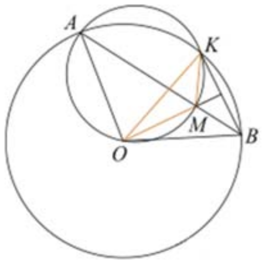
После повышения на 40 процентных пунктов ставка достигла $(20+40)\% = 60\%$.

Ответ: 60.

©2024 Тюменский областной государственный институт развития регионального образования
Копирование не допускается

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

17 В окружности с центром O проведена хорда AB, на которой выбрана точка M. Вторая окружность, описанная около треугольника MAO, повторно пересекает первую окружность в точке K.
а) Докажите, что $BM = MK$.
б) Найдите площадь треугольника OMK, если $OM = 11$ и $BK = 12$



Решение. а) Угол AOK — центральный угол, опирающийся на дугу AK, а угол ABK — вписанный угол, опирающийся на дугу AK, следовательно, $\angle AOK = 2\angle ABK$. Во второй окружности углы AOK и AMK являются вписанными, опирающимися на дугу AK, следовательно, $\angle AOK = \angle AMK$. Получаем, что $\angle AMK = 2\angle ABK$.

Рассмотрим треугольник BMK. По теореме о внешнем угле треугольника

$$\angle MKB = \angle AMK - \angle MBK = 2\angle MBK - \angle MBK = \angle MBK.$$

Отсюда следует, что $MB = MK$.

б) Поскольку $MB = MK$, точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BK. Отрезки OB и OK равны как радиусы окружности, поэтому точка O также лежит на указанном серединном перпендикуляре. Следовательно, OM — серединный перпендикуляр к отрезку BK, а значит,

$$S_{OKM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BK}{2} \cdot OM = 33.$$

Ответ: 33.

©2024 Тюменский областной государственный институт развития регионального образования
Копирование не допускается

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

18 Найти все значения a, при каждом из которых функция

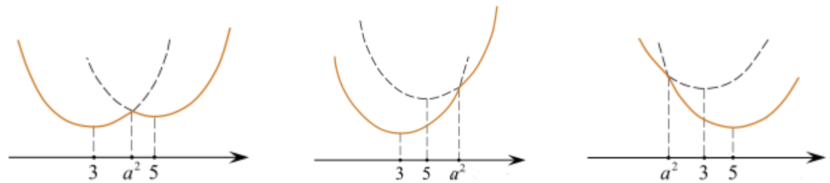
$f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 8x$ имеет более двух точек экстремума.

Решение. 1. Функция $f(x)$ имеет вид

а) при $x \geq a^2$ $f(x) = x^2 - 10x + 2a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии x=5

б) при $x \leq a^2$ $f(x) = x^2 - 6x - 2a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии x=3

2. Все возможные виды графиков функции показаны на рисунках:



Графики обеих квадратичных функции проходят через точку $(a^2 ; f(a^2))$

©2024 Тюменский областной государственный институт развития регионального образования
Копирование не допускается

3. Функция $y = f(x)$ имеет более двух точек экстремума, а именно три, в единственном случае (рис. 1):

$3 < a^2 < 5 \Leftrightarrow \sqrt{3} < |a| < \sqrt{5}.$

Ответ: $-\sqrt{5} < a < -\sqrt{3}; \sqrt{3} < a < \sqrt{5}.$

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

©2024 Тюменский областной государственный институт развития регионального образования
Копирование не допускается

19 На доске написано 19 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 11. Среднее арифметическое написанных на доске чисел равно 10. С этими числами произвели следующие действия: четные числа разделили на 2, а нечетные — умножили на 2. Пусть A — среднее арифметическое полученных чисел.

а) Могли ли оказаться так, что $A = 17$?

б) Могли ли оказаться так, что $A = 7$?

в) Найдите наибольшее возможное значение A.

Решение. а) Сумма этих чисел равна 19·10=190.

Мы хотим, чтобы она стала 19·17=323.

Пусть сумма четных составляла 2Х, а сумма нечетных *У*.

Тогда 2Х+У=190, 2У+Х=323. Решая эту систему, находим Х=19, У=152. Это возможно. Пусть, например, изначально были записаны 13 раз число 11, один раз число 9, четыре раза число 8 и один раз число 6.

б) Аналогично, составляя систему, получим 2Х+У=190, 2У+Х=133, откуда 3(Х+У)=323, что невозможно для целых *Х и У*.

в) Аналогично, составляя систему, получим 2Х+У=190, 2У+Х=19А, откуда

$$Х = \frac{380 - 19А}{3}, У = \frac{38А - 190}{3}$$

Тогда Х≥1, поэтому 19А≤ 377. Наибольшее возможное значение А равно $\frac{377}{19}$.Такая ситуация возможна, если взять Х=1 и У=188 (например для набора 2, 1 и 17 раз по 11).

Ответ: а) Да; б) Нет; в) $\frac{377}{19} = 19\frac{16}{19}$.

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующий результатов: — обоснованное решение в п. *а*; — пример в п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

©2024 Тюменский областной государственный институт развития регионального образования
Копирование не допускается