УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ

Угол между плоскостями – это угол между перпендикулярами, проведенных в этих плоскостях к их общей прямой

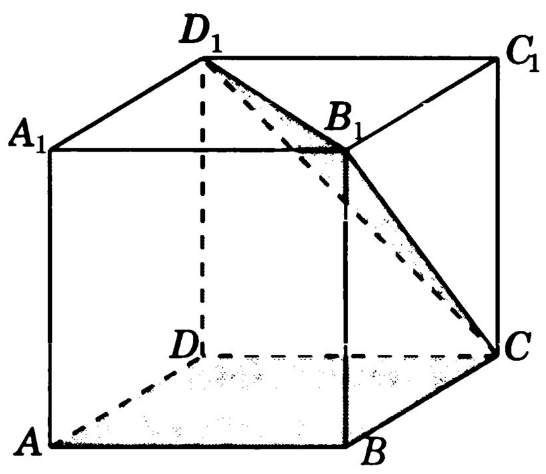
Метод:

1. Необходимо найти общую прямую
2. Провести перпендикуляры к этой прямой лежащих в данных плоскостях
3. Достроить до треугольника
4. Если треугольник прямоугольный, то найти через соотношения в прямоугольном треугольнике
5. Если треугольник не прямоугольный, то найти косинус угла по теореме косинусов.

Рекомендация: иногда полезно построить плоскость параллельную одной из заданных.

ЗАДАЧИ

1. В кубе $A...D_1$ найдите тангенс угла между плоскостями ABC и CB_1D_1.



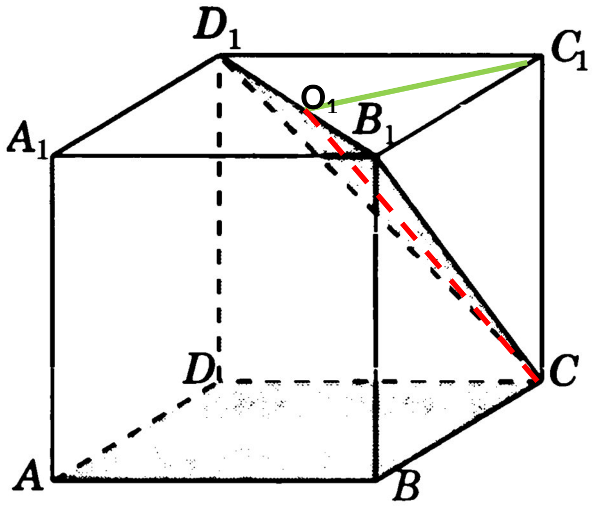
Решение:

$(ABC) \parallel (D_1C_1B_1)$

Тогда D_1B_1 - общая прямая для $(D_1C_1B_1)$ и (CB_1D_1)

$D_1B_1 \perp C_1A_1$(как диагонали квадрата $A_1B_1C_1D_1$)

$C0_1 \perp D_1B_1$ (т.к. DD_1B_1C-равносторонний)



Угол CO_1C_1- искомый

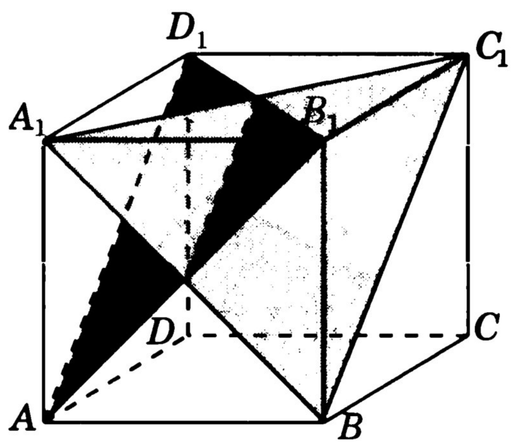
Положим, что сторона куба равна *a, тогда* $C_10_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Треугольник CO_1C_1 – прямоугольный, т.к. $CC_1 \perp C_1O_1$

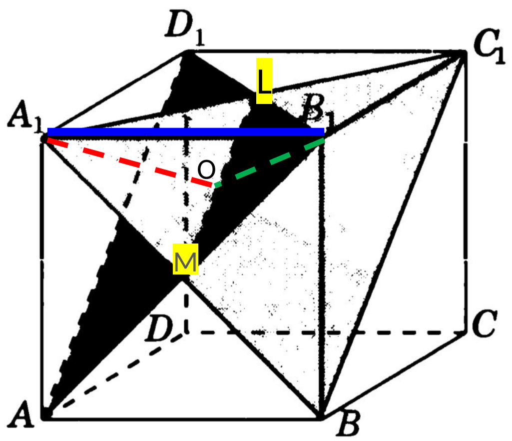
Тогда $tg CO_1C_1 = \frac{CC_1}{C_10_1} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$

Ответ: $\sqrt{2}$

2. В кубе $A \ldots D_1$ найдите косинус угла между плоскостями BA_1C_1 и AB_1D_1.



Решение:



Положим, что сторона куба равна a.

LM – общая прямая

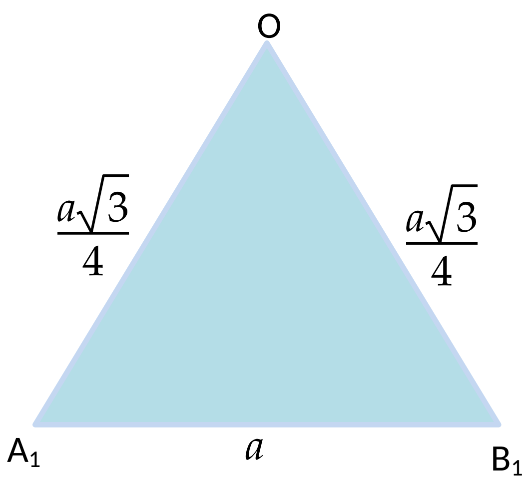
LM – средняя линия в треугольнике AB_1D_1

LM – средняя линия в треугольнике A_1C_1B

$B_1O \perp LM$, где O – середина LM

$A_1O \perp LM$

$\angle A_1OB_1$ - искомый угол



Рассмотрим треугольник A_1B_1O

В нем $A_1O = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

$B_1O = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

$A_1B_1 = a$

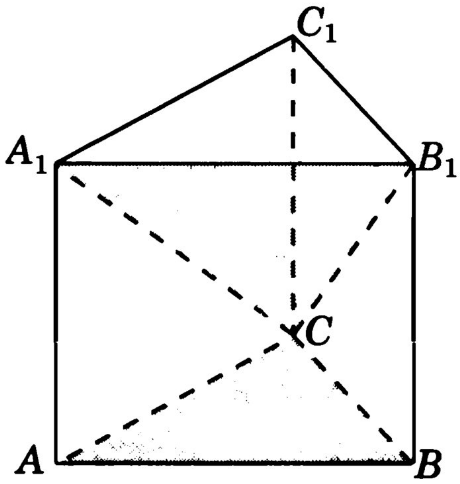
По теореме косинусов найдем угол:

$$\cos\angle A_1OB_1 = \frac{A_1O^2 + B_1O^2 - A_1B_1{}^2}{2A_1O \cdot B_1O}$$

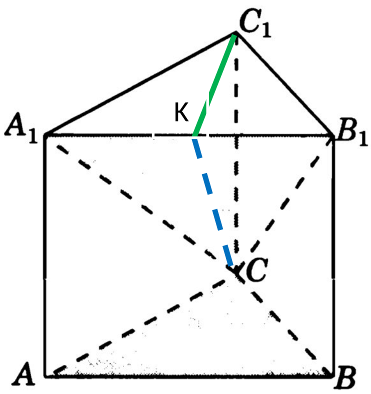
$$\cos\angle A_1OB_1 = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - a^2}{2\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{3a^2}{2}} = \frac{1}{3}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$

3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между плоскостями ABC и CA_1B_1.



Решение:



$(A_1B_1C_1) \| (ABC)$

A_1B_1 – общая прямая $(A_1B_1C_1)$ и (CA_1B_1)

$C_1K \perp A_1B_1$, где K - середина A_1B_1

$CK \perp A_1B_1$

$\angle CKC_1$ – искомый угол

Положим, что сторона призмы равна *a*.

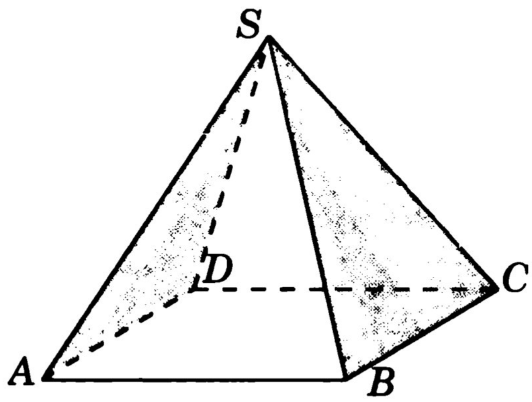
Тогда $C_1K = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$tg\angle CKC_1 = \frac{CC_1}{C_1K} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

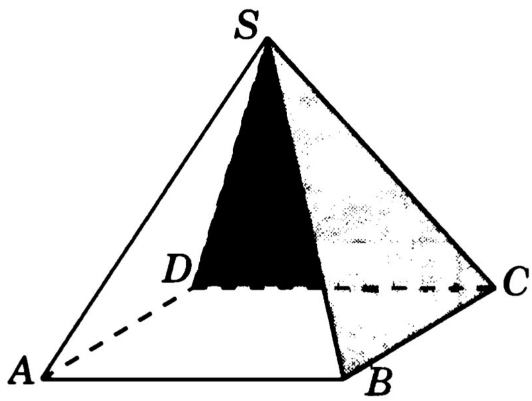
4. В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD*, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями *SAD* и *SBC*.



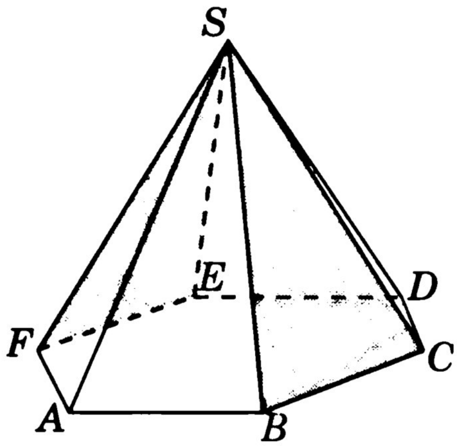
Указание:

Через среднюю линию треугольника SBC провести плоскость параллельную плоскости SAD.

5. В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD*, все ребра которой равны 1, найдите косинус двугранного угла, образованного гранями *SBC* и *SCD*.



6. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между плоскостями SBC и SEF.



Указание:

Выполнить те же действия, что и в задаче 4.